

COURS 23

Exemple de représentation

(1) (c.f. Exercice 218). Action $\rightsquigarrow$ Représentation

Soit G un groupe

Soit X un ensemble muni d'une action de G

$\Leftrightarrow$ On a un morphisme de groupe

$$G \longrightarrow G_X$$

Ex 218 $\Rightarrow$ On a un morphisme de groupe

$$\begin{array}{ccc} G_X & \xrightarrow{f} & GL(V_X) \\ \sigma & \mapsto & \left(\begin{array}{l} \rho_\sigma: V_X \xrightarrow{\sim} V_X \\ e_x \mapsto e_{\sigma(x)} \end{array} \right) \end{array}$$

où $V_X = \text{Vect}_k \{x \in X\} = k^{(X)} := \bigoplus_{x \in X} k := kX$

$\approx$ "espace vectoriel librement engendré par l'ens. X "

$$= \left\{ \lambda_1 e_{x_1} + \dots + \lambda_n e_{x_n} \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ x_i \in X \\ \lambda_i \in k \end{array} \right\}$$

comme dans Ex 218, $\chi_f(\sigma) := \text{tr}(f(\sigma)) = \# \{x \in X \mid \sigma(x) = x\}$

" on a un foncteur

$$\begin{array}{ccc} G\text{-ens.} & \longrightarrow & G\text{-rep.} \\ G \curvearrowright X & \longmapsto & f: G \rightarrow GL(V_X) \end{array}$$

Rq $\dim V_X = |X|$

(ii) 1 := représentation triviale := k muni de l'action triviale de G .
(Triviale)

$$\text{i.e. } \rho: G \longrightarrow GL(k) \\ g \longmapsto \text{id}_k$$

1 ^{$\oplus n$} := représentation triviale de n

= k^n muni de l'action triviale de G

$$\text{i.e. } \rho: G \longrightarrow GL(k^n) \\ g \longmapsto \text{id}_{k^n}$$

(iii) (~~Régulière~~ Ex 219) est un cas particulier :

$G \hookrightarrow G$ par translation à gauche

$$\text{i.e. } G \xrightarrow{\ell} \mathbb{S}_G \quad \text{est un morphisme de groupe} \\ g \longmapsto \left(\begin{array}{l} \ell_g: s \longmapsto gs \\ h \longmapsto gh \end{array} \right)$$

$$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \rho_\ell: G \longrightarrow GL(V_G)^{k[G]} = \text{représentation régulière (à gauche)} \\ g \longmapsto (\sigma_h \longmapsto \sigma_{gh})$$

$G \hookrightarrow G$ par translation à droite

$$(iv) \quad \text{i.e. } G \xrightarrow{r} \mathbb{S}_G \quad \text{est un morphisme de groupe} \\ g \longmapsto \left(\begin{array}{l} r_g: s \longmapsto sg \\ h \longmapsto hg \end{array} \right)$$

$$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \rho_r: G \longrightarrow GL(V_G)_{k[G]} = \text{représentation régulière (à droite)}$$

$$g \mapsto (Pr(g) = V_g \rightarrow V_g) \\ \delta_h \mapsto \delta_{hg}$$

(v) Rappel :

$$V \rightsquigarrow V^V = \text{Hom}_k(V, k)$$

$$V, W \longmapsto V \otimes W$$

$$V, W \longmapsto \text{Hom}_k(V, W)$$

$$V, W \longmapsto V \otimes_k W$$

Raison "profonde" $k[G]$ est une k -algèbre spéciale avec plus de structure.

En générale, si A, B deux k -algèbres

Alors $A \otimes_k B$ est aussi munie d'une str. naturelle de k -algèbre.

$$A \otimes_k B \times A \otimes_k B \xrightarrow{m} A \otimes_k B$$

$$(a \otimes b, a' \otimes b') \mapsto aa' \otimes bb'$$

On peut vérifier que $A \otimes_k B$ est une k -alg.

$$\bullet \quad A \otimes_k B \text{ Mod} \simeq \text{Mod}_{A \otimes_k B}$$

$$M \leftarrow M$$

$$\text{on } a \otimes b, x = a \cdot x \cdot b$$

• On spécialise $\hat{=}$ $A = B = k[G]$

$$\text{si } V \in G\text{-Mod} = \text{Rep}_k(G)$$

$$W \in G\text{-Mod}$$

$$\underbrace{V}_{k[G]} \otimes_{\underbrace{k}_{k[G]}} \underbrace{W}_{k[G]^{\text{op}}} \in k[G]\text{Mod}_{k[G]^{\text{op}}}$$

$$\downarrow$$

$$\text{Mod}$$

$$k[G] \otimes_k k[G]$$

$$\downarrow$$

$$\text{Mod}_{k[G]}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Rappel : } A \xrightarrow{\varphi} B \text{ morphisme de } k\text{-alg} \\ \text{alors} \quad B\text{Mod} \longrightarrow A\text{Mod} \\ \quad \quad M \longmapsto M \end{array} \right)$$

$$a.x := \varphi(a).x$$

clé/Idée: $\exists$ un morphisme de k -algèbre :

$$k[G] \xrightarrow{\Delta} k[G] \otimes_k k[G]$$

$$\delta_g \mapsto \delta_g \otimes \delta_g$$

i.e. une comultiplication sur $k[G]$.

qui vérifie coassociativité :

$$k[G] \xrightarrow{\Delta} k[G] \otimes k[G]$$

$$\downarrow \Delta$$

$$\downarrow \Delta \otimes \text{id}$$

$$k[G] \otimes k[G] \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta} k[G] \otimes k[G] \otimes k[G]$$

Pour que V^V soit G -mod.

$$\text{Hom}_{k[G]}(V, k) \in \text{Mod}_{k[G]} \cong {}_{k[G]^{\text{op}}} \text{Mod} \xrightarrow{?} \text{Mod}_{k[G]}$$

Idée/clé on a un morphisme de k -alg.

$$k[G] \xrightarrow{\iota} k[G]^{\text{op}}$$

$$\delta_g \mapsto \delta_{g^{-1}}$$

Conclusion : $k[G]$ est un peu plus de structure.

($\bullet$ k -Algèr)

une algèbre de Hopf $\left\{ \begin{array}{l} \bullet k\text{-coalgèbre} \\ \bullet \text{anti-pode} \end{array} \right\} \rightarrow \text{compatibles.}$

(vi) Soient X_1, X_2 deux ensembles munis d'action de G .

(i) $V_{X_1}, V_{X_2} \in G\text{-Mod}$

Exo On a isom. de G -modules :

$$\textcircled{1}. V_{X_1} \oplus V_{X_2} \cong V_{X_1 \sqcup X_2}$$

$$\left(\text{eg } V_X \oplus V_X \cong V_{X \sqcup X} \quad \text{où } X \sqcup X := X \times \{0,1\} \right)$$

$$\textcircled{2}. V_{X_1} \otimes_k V_{X_2} \cong V_{X_1 \times X_2} \quad \text{où } X_1 \times X_2 \text{ est muni de l'action de } G \text{ diagonale}$$

$$\textcircled{3}. V_X^\vee \cong V_X$$